

**ИНФОРМАТИКА,  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ  
ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ**

---

**COMPUTER SCIENCE, COMPUTER  
ENGINEERING AND CONTROL**

УДК 681.5.015.4

doi:10.21685/2072-3059-2022-1-1

**Постановка и решение задачи идентификации  
методом регрессионного анализа**

**П. П. Макарычев<sup>1</sup>, С. В. Шибанов<sup>2</sup>, А. Ю. Афонин<sup>3</sup>**

<sup>1,2,3</sup>Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

<sup>1</sup>makpp@yandex.ru, <sup>2</sup>serega@pnzgu.ru, <sup>3</sup>afonin@pnzgu.ru

**Аннотация.** *Актуальность и цели.* Объектом исследования являются дискретные и непрерывные модели нелинейных динамических объектов. Предметом исследования является метод построения моделей с применением прямого и обратного преобразования Лапласа, декомпозиции модели на линейную и нелинейную составляющие, декомпозиции линейной части модели на входную и выходную составляющие. Цель работы – разработка метода, обеспечивающего построение как дискретных, так и непрерывных моделей динамических нелинейных объектов для решения задач структурной и параметрической идентификации параметров методом регрессионного анализа временных рядов по результатам регистрации значений входного и выходного сигналов с заданным интервалом времени. *Материалы и методы.* При разработке метода идентификации структур и параметров моделей динамических объектов использованы основные положения теории систем, прямого и обратного преобразования Лапласа, теории построения дискретных моделей, регрессионного и системного анализа временных рядов. *Результаты.* Разработан метод идентификации структур, параметров дискретных и непрерывных моделей объектов с применением регрессионного анализа. При идентификации моделей метод обеспечивает поиск количества и значений полюсов, нулей передаточной функции, коэффициентов нелинейности объекта по критерию минимума среднеквадратичного отклонения рассчитанных значений от зарегистрированных значений выходного сигнала. *Выводы.* Метод обеспечивает идентификацию структуры и параметров дискретных и непрерывных моделей по критерию минимума среднеквадратичного отклонения зарегистрированных и рассчитанных значений выходного сигнала. Применение метода построения и преобразования моделей возможно в сочетании с различными способами интегрирования временных рядов.

**Ключевые слова:** нелинейный динамический объект, параметрическая идентификация, регрессионный анализ, дискретная и непрерывная модели объекта

**Для цитирования:** Макарычев П. П., Шибанов С. В., Афонин А. Ю. Постановка и решение задачи идентификации методом регрессионного анализа // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2022. № 1. С. 3–19. doi:10.21685/2072-3059-2022-1-1

## Statement and solution of the identification problem of regression analysis method

P.P. Makarychev<sup>1</sup>, S.V. Shibanov<sup>2</sup>, A.Yu. Afonin<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup>Penza State University, Penza, Russia

<sup>1</sup>makpp@yandex.ru, <sup>2</sup>serega@pnzgu.ru, <sup>3</sup>afonin@pnzgu.ru

**Abstract.** *Background.* The object of the research is discrete and continuous models of nonlinear dynamic objects. The subject of the research is the method of constructing models using direct and inverse Laplace transforms, decomposition of the model into linear and nonlinear components, decomposition of the linear part of the model into input and output components. The purpose of this research is to develop a method that provides the construction of both discrete and continuous models of dynamic nonlinear objects for solving problems of structural and parametric identification of parameters by the method of regression analysis of time series based on the results of recording the values of input and output signals with a given time interval. *Materials and methods.* Developing a method for identifying structures and parameters of dynamic objects' models, the main provisions of the theory of systems, direct and inverse Laplace transforms, the theory of constructing discrete models, regression and system analysis of time series were used. *Results.* A method for identifying structures, parameters of discrete and continuous models of objects using regression analysis has been developed. When identifying models, the method provides a search for the number and values of poles, zeros of the transfer function, non-linearity coefficients of the object according to the criterion of the minimum standard deviation of the calculated values from the recorded values of the output signal. *Conclusions.* The method provides identification of the structure and parameters of discrete and continuous models by the criterion of the minimum standard deviation of the recorded and calculated values of the output signal. The application of the method of constructing and transforming models is possible in combination with various methods of integrating time series.

**Keywords:** nonlinear dynamic object, parametric identification, least squares regression analysis, discrete and continuous object models

**For citation:** Makarychev P.P., Shibanov S.V., Afonin A.Yu. Statement and solution of the identification problem of regression analysis method. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Tekhnicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Engineering sciences.* 2022;(1):3–19. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3059-2022-1-1

### Введение

Задача параметрической идентификации моделей динамических объектов может быть решена с использованием одного из трех подходов [1–3]. Первый подход предполагает анализ амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик объекта. Второй подход предполагает анализ реакции объекта на импульсное или ступенчатое входное воздействие. Третий подход реализуется на основе регрессионного анализа входных и выходных сигналов, наблюдаемых в режиме рабочего функционирования объекта. Этот подход, как правило, применяется в ситуациях, когда эксперименты с динамическим объектом недопустимы или результаты идентификации в режиме реального времени используются для коррекции поведения динамического объекта.

В работе обсуждается вариант развития третьего подхода к решению задачи параметрической идентификации параметров непрерывной модели на основе декомпозиции на подзадачи. Предлагается идентификацию параметров непрерывной модели линейного объекта осуществлять в следующей последовательности:

1. Оценка значений параметров дискретной (разностной) модели по результатам регрессионного анализа наблюдаемых значений входного и выходного сигналов объекта на заданном интервале времени:

$$y_{k+n} = \sum_{j=1}^n a_{n-j} y_{k+(n-j)} + \sum_{i=1}^m b_{k-j} x_{k+(m-i)}, \quad n > m, \quad (1)$$

где  $y_{k+n}$ ,  $y_{k+(n-j)}$  – наблюдаемые значения выходного сигнала объекта;  $x_{k+(m-i)}$  – наблюдаемые значения сигнала на входе объекта;  $a_{n-j}$ ,  $b_{k-j}$  – параметры дискретной модели объекта.

2. Декомпозиция дискретной модели (1) с известными параметрами на два последовательно соединенных компонента, представляющих дискретную модель входа и дискретную модель выхода объекта:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_k &= \sum_{i=1}^m b_{k-j} x_{k+(m-i)}, \\ \tilde{y}_{k+n} - \sum_{j=1}^n a_{n-j} \tilde{y}_{k+(n-j)} &= \tilde{u}_k. \end{aligned}$$

3. Формирование по виду дискретных моделей двух передаточных функций в изображении по Лапласу. Первая передаточная функция содержит только нули передаточной функции объекта:

$$X(s)/U(s) = \frac{K}{(s + \beta_1)(s + \beta_2) \dots (s + \beta_m)},$$

где  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  – корни характеристического уравнения (нули);  $K$  – коэффициент передачи.

Вторая передаточная функция содержит только полюса передаточной функции объекта:

$$Y(s)/U(s) = \frac{1}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2) \dots (s + \alpha_n)},$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  – корни характеристического уравнения (полюса).

4. Формирование на основе передаточных функций систем уравнений в изображении по Лапласу, выполнение обратного преобразования Лапласа и построение систем конечно-разностных уравнений для входного и выходного компонентов модели объекта.

5. Расчет значений полюсов и нулей непрерывной передаточной функции объекта по результатам сопоставления значения весовых коэффициентов регрессионной модели с аналитическими определениями весовых коэффициентов, найденными с применением преобразований по Лапласу.

Для оценки близости регрессионной модели физическому объекту в работе использована процедура валидации. В качестве критерия соответствия параметров модели параметрам объекта использовалось минимальное стандартное отклонение расчетных значений от наблюдаемых значений выходной переменной [4, 5]. Предполагается, что значение выходной переменной в каждый момент времени является взвешенной суммой значений выходной

переменной, задержанных на временные интервалы, кратные шагу выборки  $\Delta t$  и случайной переменной  $\varepsilon(k\Delta t)$ .

### 1. Постановка задачи параметрической идентификации

Предположим, что по результатам наблюдения за функционированием нелинейного динамического объекта зафиксированы значения входной  $x_k = x(k\Delta t)$  и выходной  $y_k = \hat{y}(k\Delta t) + \varepsilon(k\Delta t)$  переменных в дискретные моменты времени  $k\Delta t$  на заданном интервале времени  $[0, N\Delta t]$ . Наблюдения проведены при наличии шума, характеризуемого на выходе объекта случайной переменной  $\varepsilon(k\Delta t)$ .

Графики наблюдаемых переменных  $x_k, y_k + \varepsilon_k$  при шаге дискретизации  $\Delta t = 0,25$  мс приведены на рис. 1.

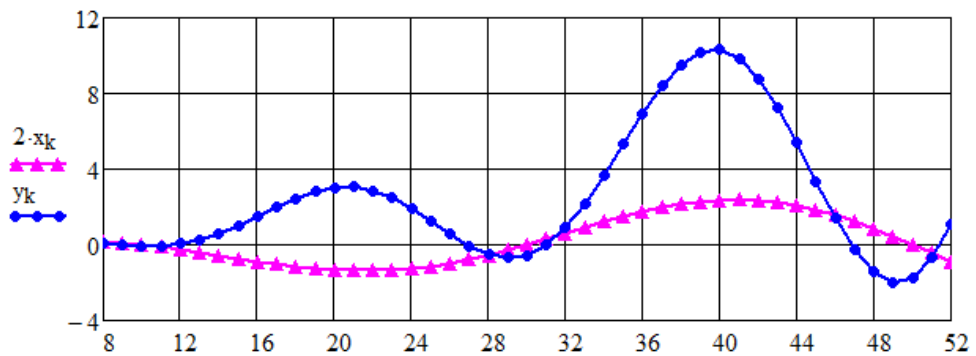


Рис. 1. Наблюдаемые переменные:  $x_k$  – входная независимая переменная;  $y_k$  – выходная зависимая переменная

На основе анализа значений и графиков переменных  $x_k, y_k$  практически невозможно определить структуру и параметры модели: количество полюсов и нулей передаточной функции, вид корней характеристического уравнения. В связи с этим целесообразно определить максимально допустимое количество полюсов  $n$  и нулей  $m$ . Для практической реализации параметрической идентификации можно принять  $n_{\max} = 4, m_{\max} = 3$  и установить требование  $n > m$ . В этом случае потребуется на основе наблюдаемых значений входной и выходной переменных решить  $n_{\max}(m_{\max} + 1)$  задач оценки параметров дискретной (непрерывной) модели и выбрать лучший вариант по заданному критерию.

В качестве объекта исследования выберем непрерывную модель, с использованием которой сформируем временные ряды выходного и входного сигналов:  $y(k\Delta t), x(k\Delta t), \varepsilon(k\Delta t), k = 1, 2, \dots, N$ . Структура имитационной модели в пространстве переменных состояния приведена на рис. 2, где приняты следующие обозначения:  $s$  – комплексная переменная преобразования Лапласа;  $\alpha_1, \alpha_2$  – полюса объекта;  $K$  – коэффициент передачи;  $A_1, A_2$  – весовые коэффициенты, значения которых зависят от нуля передаточной

функции линейной части динамического объекта. Параметры имитационной модели объекта имеют следующие значения:

$$A=1,75; B=-0,75; K=25; \alpha_1=-5; \alpha_2=-3.$$

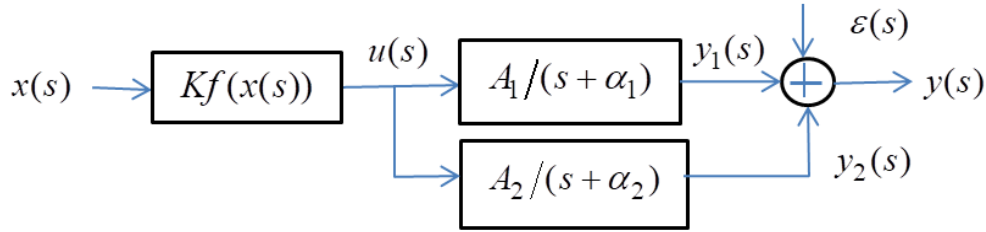


Рис. 2. Схема модели имитации нелинейного динамического объекта

В имитационной модели нелинейная часть объекта представлена многочленом второй степени:

$$u(x) = K \left( q_1 x(t) + q_2 (x(t))^2 \right), \quad q_1 = 0,2, \quad q_2 = 3,5.$$

Входной сигнал с широким спектром гармоник на входе нелинейной части динамического объекта имеет следующий вид:

$$x(t) = 3(1 - \exp(-at) \cos(2\pi t/T)), \quad T = 10, \quad a = 0,05.$$

Таким образом, в работе решение задачи параметрической идентификации нелинейного динамического объекта в зависимости от цели исследования сводится к определению параметров дискретной модели и непрерывной модели, адекватных имитационной модели с заданным набором нулей, полюсов и степени многочлена нелинейной части объекта.

## 2. Решение задачи параметрической идентификации

При решении задачи параметрической идентификации регрессионным методом наименьших квадратов нелинейные и динамические свойства объекта разделяют. При этом возможно использовать два варианта. Первый вариант предполагает последовательное соединение нелинейной статической части и линейной динамической части в модели, которая является классической нелинейной моделью Гаммерштейна [2, 3]. При втором варианте структура модели задается как последовательное соединение линейной динамической части и нелинейной части объекта. Эта модель является классической моделью Винера. Оба варианта обеспечивают построение моделей, в которых нелинейные и динамические свойства объекта искусственно разделены. Для построения более адекватных моделей осуществляют декомпозицию модели линейной динамической части объекта на менее сложные модели Гаммерштейна или Винера, посредством которых реализуется модель с параллельной структурой.

В данной работе для решения задачи параметрической идентификации нелинейного динамического объекта использована классическая нелинейная модель Гаммерштейна (рис. 3).

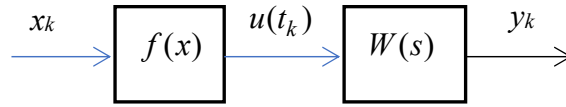


Рис. 3. Модель Гаммерштейна динамического объекта

В соответствии с этой моделью сигнал на входе линейной динамической части объекта в процессе эксперимента не наблюдается. В связи с этим задача идентификация параметров нелинейной части и линейной динамической части модели предполагает обоснование модели статической нелинейной части и динамической линейной части объекта.

### 3. Модель нелинейной части динамического объекта

При осуществлении параметрической идентификации могут быть использованы две группы нелинейных регрессионных моделей [6–10]. Первую группу составляют модели, нелинейные относительно входной (объясняющей) переменной, но линейные относительно оцениваемых параметров модели. Вторую группу составляют модели, нелинейные относительно оцениваемых параметров. Известны модели первой группы, реализованные с использованием функций: многочлен, гипербола. Из второй группы известны модели, реализованные с использованием функций: степенная, показательная, экспоненциальная.

При проведении исследований по теме статьи использована модель нелинейной части объекта из первой группы. При этом модель с одним входом и одним выходом представлена стандартно в виде многочлена от входной переменной  $x_k = x(k\Delta t)$ :

$$f = f(k\Delta t) = \sum_{j=0}^g q_j x^j(k\Delta t), \quad 2 \leq g \leq 3, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

Из выражения (1) следует, что минимальная степень многочлена  $f(k, \Delta t)$  равна 2, максимальная степень многочлена равна 3. Использование многочлена с более высокой степенью не обеспечивает значимость оценки параметров модели нелинейного динамического объекта в целом. В связи с этим степень многочлена выбирается из множества целых чисел  $Q_1 = \{2, 3\}$ .

### 4. Обоснование непрерывной модели

Передаточная функция линейного динамического объекта (линейная часть объекта) может быть представлена в виде [1]:

$$W(s) = Y(s)/X(s) = K \prod_{i=1}^m T_i(s + \beta_i) / \prod_{j=1}^n T_j(s + \alpha_j), \quad 1 \leq n \leq 4, \quad (2)$$

где  $K$  – коэффициент передачи объекта;  $T_i$ ,  $T_j$  – постоянные времени, характеризующие корни характеристического уравнения.

Декомпозиция передаточной функции (2) может быть осуществлена следующим образом:

$$Y(s) = \prod_{j=1}^n \alpha_j U(s) / \prod_{j=1}^n (s + \alpha_j), \quad (3)$$

$$U(s) = K \prod_{i=1}^m (s + \beta_i) x(s) / \prod_{i=1}^m \beta_i, \quad (4)$$

$$X(s) = \prod_{i=1}^m \beta_i U(s) / K \prod_{i=1}^m (s + \beta_i). \quad (5)$$

На основе выражений (3), (4) несложно построить системы уравнений в изображении по Лапласу для входной и выходной компонент модели объекта в изображении по Лапласу.

Задача параметрической идентификации решается при условии, что линейная динамическая часть объекта является минимальной фазовой, т.е. все полюса и нули имеют отрицательные или равные нулю значения вещественной части. Максимальное количество полюсов в передаточной функции объекта выбирается из множества целых чисел  $Q_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ . Это ограничение на количество полюсов в передаточной функции введено из-за отсутствия алгоритмов аналитического решения алгебраических уравнений пятого и более высокого порядка. Максимальное количество нулей передаточной функции выбирается из множества  $Q_3 = \{0, 1, 2, 3\}$ . Таким образом, поиск оптимального (субоптимального) варианта параметрической идентификации параметров дискретной модели нелинейного динамического объекта выполняется на множестве допустимых решений, которое определяется как прямое произведение множеств  $Q_1, Q_2, Q_3$ :

$$Q_r = Q_1 \times Q_2 \times Q_3.$$

Для линейной динамической части объекта также должно выполняться требование  $m < n$ . Сформулированные выше ограничения на линейную динамическую часть объекта можно рассматривать как трехместный предикат  $P(g, n, m)$ , множество истинности которого имеет вид

$$M_{n,m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

В матрице  $M_{n,m}$  номер строки соответствует количеству полюсов объекта, а номер столбца – количеству нулей передаточной функции линейной части объекта. Таким образом, из ограничений, введенных в (1)–(3), следует, что количество вариантов решения по выбору дискретной и непрерывной моделей нелинейного динамического объекта при заданной степени многочлена нелинейной части объекта равно 10. При изменении степени многочлена от 2 до 4 общее количество возможных дискретных моделей нелинейного динамического объекта возрастет до 30. Поиск оптимального варианта параметрической идентификации можно осуществить путем полного перебора всех рассмотренных выше вариантов моделей. Для поиска оптимального варианта в качестве целевой функции может быть использована функция среднего квадратичного отклонения [11]:

$$\sigma(g, n, m) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (y_k - \tilde{y}_k(g, n, m))^2},$$

где  $N$  – количество наблюдаемых значений выходного сигнала объекта.

### 5. Построение дискретной динамической модели

Дискретная модель объекта в изображении по Лапласу может быть построена на основе выражений (3), (4). Из (3) следует:

$$\begin{aligned} Y_{k+1}^1(s) &= Y_k^1 / (s + \alpha_1) + \prod_{j=1}^n \alpha_j U_k / (s + \alpha_1)s, \\ Y_{k+1}^2(s) &= Y_k^2 / (s + \alpha_2) + Y_k^1 / (s + \alpha_2)s, \\ &\dots\dots\dots \\ Y_{k+1}^n(s) &= Y_k^n / (s + \alpha_n) + Y_k^{n-1} / (s + \alpha_n)s, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $Y_k^1, Y_k^2, \dots, Y_k^n$  – начальные значения выходных сигналов.

На основе выражений (4), (5) вторая дискретная модель имеет вид

$$\begin{aligned} X_{k+1}^1(s) &= X_k^1 / (s + \beta_1) + (\prod_{i=1}^m \beta_i / K) U_k / (s + \beta_1)s, \\ &\dots\dots\dots \\ X_{k+1}^m(s) &= X_k^m / (s + \beta_m) + X_k^{m-1} / (s + \beta_m)s, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $X_k^1, \dots, X_k^{m-1}$  – начальные значения входных сигналов.

Выполнив обратное преобразование Лапласа для уравнений (6), (7), получим систему конечно-разностных уравнений:

$$\begin{aligned} Y_{k+1}^1 &= Y_k^1 \exp(-\alpha_1 \Delta t) + U_k (1 - \exp(-\alpha_1 \Delta t)) / \alpha_1, \\ Y_{k+1}^2 &= Y_k^2 \exp(-\alpha_2 \Delta t) + Y_k^1 (1 - \exp(-\alpha_2 \Delta t)) / \alpha_2, \\ &\dots\dots\dots \\ Y_{k+1}^n &= Y_k^n \exp(-\alpha_n \Delta t) + Y_k^{n-1} (1 - \exp(-\alpha_n \Delta t)) / \alpha_n, \\ X_{k+1}^1 &= X_k^1 \exp(-\beta_1 \Delta t) + \prod_{i=1}^m \beta_i U_k (1 - \exp(-\beta_1 \Delta t)) / K \beta_1, \\ &\dots\dots\dots \\ X_{k+1}^m &= X_k^m \exp(-\beta_m \Delta t) + X_k^{m-1} (1 - \exp(-\beta_m \Delta t)) / \beta_m. \end{aligned} \quad (8)$$

### 6. Построение модели исследуемого объекта

Для объекта, схема модели которого приведена на рис. 2, система конечно-разностных уравнений, содержащая значения выходной переменной, имеет вид



$$U_k^1 = \alpha_1 \left[ Y_{k+1}^1 - Y_k^1 \exp(-\alpha_1 \Delta t) \right] / (1 - \exp(-\alpha_1 \Delta t)),$$

$$Y_k^1 = \alpha_2 \left[ Y_{k+1}^2 - Y_k^2 \exp(-\alpha_2 \Delta t) \right] / (1 - \exp(-\alpha_2 \Delta t)).$$

Конечно-разностное уравнение, содержащее значения входной переменной, имеет вид

$$U_k^2 = (K / \prod_{i=1}^m \beta_i) \left[ X_{k+1}^1 - X_k^1 \exp(-\beta_1 \Delta t) \right] / (1 - \exp(-\beta_1 \Delta t)).$$

Приняв  $n = 2$ ,  $m = 1$ , получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} U_k^1 &= \{ \alpha_1 \alpha_2 / [1 - \exp(-\alpha_1 \Delta t)] [1 - \exp(-\alpha_2 \Delta t)] \} \times \\ &\times \{ Y_{k+2} - Y_{k+1} [\exp(-\alpha_1 \Delta t) + \exp(-\alpha_2 \Delta t)] + Y_k \exp(-\alpha_1 \Delta t) \exp(-\alpha_2 \Delta t) \}, \\ U_k^2 &= \{ K / (\beta_1 [1 - \exp(-\beta_1 \Delta t)]) \} \times [X_{k+1} - X_k \exp(-\beta_1 \Delta t)]. \end{aligned}$$

Приняв  $U_k^1 = U_k^2$ , получим дискретную модель динамического объекта:

$$\begin{aligned} Y_{k+2} &= Y_{k+1} [\exp(-\alpha_1 \Delta t) + \exp(-\alpha_2 \Delta t)] - Y_k \exp(-\alpha_1 \Delta t) \exp(-\alpha_2 \Delta t) + \\ &+ \{ K [1 - \exp(-\alpha_1 \Delta t)] [1 - \exp(-\alpha_2 \Delta t)] / \beta_1 [1 - \exp(-\beta_1 \Delta t)] \} \times \\ &\times [X_{k+1} - X_k \exp(-\beta_1 \Delta t)]. \end{aligned} \quad (9)$$

## 7. Параметрическая идентификация модели

Рассмотрим решение задачи на примере параметрической идентификации минимально-фазового объекта, передаточная функция которого содержит только отрицательные полюса и нули. Размерность непрерывной модели объекта определяется следующими значениями:  $n = 2$ ,  $m = 1$ ,  $g_i$ ,  $i = 1, 2$ . При этом передаточная функция линейной части объекта в изображении по Лапласу имеет вид

$$W(s) = K \left[ (s + \beta_1) / \sum_{j=1}^2 (s + \alpha_j) \right].$$

На основе выражений (1), (9) в предположении  $q_0 = 0$  дискретная модель нелинейного динамического объекта может быть представлена в виде конечно-разностного уравнения:

$$\tilde{y}_k = a_1 \tilde{y}_{k-1} + a_2 \tilde{y}_{k-2} + b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + b_2 x_k^2 + b_3 x_{k-1}^2. \quad (10)$$

С использованием экспериментальных данных и выбранной структуры регрессионной модели (4) формируются матрицы  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{W}$  для решения задачи параметрической идентификации методом наименьших квадратов [1, 2]. Матрица-столбец  $\mathbf{Y}$  содержит значения выходной переменной  $y_k$ , зарегистрированные в моменты времени  $k \Delta t$ ,  $k = 3, 4, \dots, 56$  (рис. 4).

		1			1				1
x =	40	1.180408	y =	40	10.30251	ε =	40	1.529511·10 <sup>-5</sup>	
	41	1.1882		41	9.829023		41	5.661323·10 <sup>-7</sup>	
	42	1.165362		42	8.78654		42	-3.82237·10 <sup>-5</sup>	
	43	1.111423		43	7.259859		43	-2.045724·10 <sup>-5</sup>	
	44	1.026764		44	5.39126		44	-3.369206·10 <sup>-5</sup>	
	45	0.912628		45	3.369039		45	-6.608229·10 <sup>-6</sup>	
	46	0.771107		46	1.409689		46	5.090557·10 <sup>-5</sup>	
	47	0.605104		47	-0.263861		47	9.026378·10 <sup>-6</sup>	
	48	0.418275		48	-1.445529		48	2.566592·10 <sup>-5</sup>	
	49	0.214944		49	-1.969735		49	3.698815·10 <sup>-5</sup>	
	50	0		50	-1.731185		50	-8.145814·10 <sup>-7</sup>	
	51	-0.221224		51	-0.699302		51	1.394005·10 <sup>-5</sup>	
	52	-0.443088		52	1.07424		52	8.107966·10 <sup>-6</sup>	
53	...	53	...	53	...				

Рис. 4. Фрагменты временных рядов сигналов  $x(k\Delta t)$ ,  $y(k\Delta t)$ ,  $\varepsilon(k\Delta t)$

На основе выражений (4), (5) формируется матрица  $W$ , содержащая 6 столбцов и 52 строки. Фрагмент матрицы  $W$ , содержащий 12 строк, в формате математического пакета Mathcad приведен на рис. 5.

	1	2	3	4	5	6	
W =	40	10.185058	9.51558	1.180408	1.143269	1.393363	1.307065
	41	10.30251	10.185058	1.1882	1.180408	1.41182	1.393363
	42	9.829023	10.30251	1.165362	1.1882	1.358068	1.41182
	43	8.78654	9.829023	1.111423	1.165362	1.235261	1.358068
	44	7.259859	8.78654	1.026764	1.111423	1.054245	1.235261
	45	5.39126	7.259859	0.912628	1.026764	0.832891	1.054245
	46	3.369039	5.39126	0.771107	0.912628	0.594606	0.832891
	47	1.409689	3.369039	0.605104	0.771107	0.366151	0.594606
	48	-0.263861	1.409689	0.418275	0.605104	0.174954	0.366151
	49	-1.445529	-0.263861	0.214944	0.418275	0.046201	0.174954
	50	-1.969735	-1.445529	0	0.214944	0	0.046201
	51	-1.731185	-1.969735	-0.221224	0	0.04894	0
	52	-0.699302	-1.731185	-0.443088	-0.221224	0.196327	...

Рис. 5. Фрагмент матрицы  $W$  в формате пакета Mathcad

В первом и во втором столбцах размещены значения выходной переменной  $y_{k-1}$ ,  $y_{k-2}$  в моменты времени  $(k-1)\Delta t$  и  $(k-2)\Delta t$  соответственно. В третьем и четвертом столбцах размещены значения входной переменной  $x_k$ ,  $x_{k-1}$  в моменты времени  $k\Delta t$  и  $(k-1)\Delta t$  соответственно. В пятом и шестом столбцах – значения входной переменной  $(x_k)^2$  в моменты времени  $k\Delta t$  и  $(k-1)\Delta t$  соответственно. Количество строк в матрицах  $Y$ ,  $W$  для рассматриваемого примера равно 45. Между сформированными матрицами  $Y$ ,  $W$  существует функциональная зависимость:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{B}, \quad (11)$$

где  $\mathbf{B}$  – вектор параметров регрессионной модели  $a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, b_3$ .

Значения элементов вектора  $\mathbf{B}$  определяются регрессионным методом наименьших квадратов. Решение векторно-матричного уравнения (6) имеет вид [3, 4]:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{Y}, \quad (12)$$

Результатом решения векторно-матричного уравнения (5) являются значения параметров регрессионной модели. Между параметрами регрессионной модели и дискретной модели (4) существует взаимно однозначное соответствие:

$$B = (B_1 = a_1 \quad B_2 = a_2 \quad B_3 = b_0 \quad B_4 = b_1 \quad B_5 = b_2 \quad B_6 = b_3).$$

### 8. Валидация дискретной модели динамического объекта

Оценка соответствия дискретной (разностной) модели реальному нелинейному динамическому объекту является задачей валидации. Оценка соответствия дискретной модели реальному объекту (имитационной модели) обеспечивает установление степени соответствия физических законов функционирования объекта, отраженных исследователем в дискретной модели или соответствие модели постановке решаемой задачи по применению объекта в системе управления.

Степень соответствия регрессионной модели исследуемому нелинейному динамическому объекту оценивалась величиной среднеквадратического отклонения, рассчитанных значений выходной переменной  $\tilde{y}_k$  от наблюдаемых значений  $y_k$ :

$$\sigma(g, n, m) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (y_k - \tilde{y}_k(g, n, m))^2}.$$

Значения выходной переменной регрессионной модели рассчитывались с использованием следующей формулы:

$$z_k = a_1 z_{k-1} + a_2 z_{k-2} + b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + b_2 x_k^2 + b_3 x_{k-1}^2, \quad k = 8, 9, \dots, 52.$$

Начальные значения выходной рассчитываемой переменной  $z_{k-1}, z_{k-2}$  принимались из условия равенства наблюдаемым значениям выходной переменной:

$$z_{k-1} = y_{k-1}, \quad z_{k-2} = y_{k-2}.$$

Графики переменных  $y_k, \tilde{y}_{k-1}$  приведены на рис. 6. Среднее квадратичное отклонение рассчитанных значений  $z_k$  от «наблюдаемых» значений  $y_k$  составляет  $\sigma = 0,958 \cdot 10^{-2}$ .

График рассчитанных значений выходного сигнала  $z_k$  на рис. 6 для большей наглядности смещен на величину  $\Delta t$  относительно графика наблюдаемых значений выходного сигнала  $y_k$ .

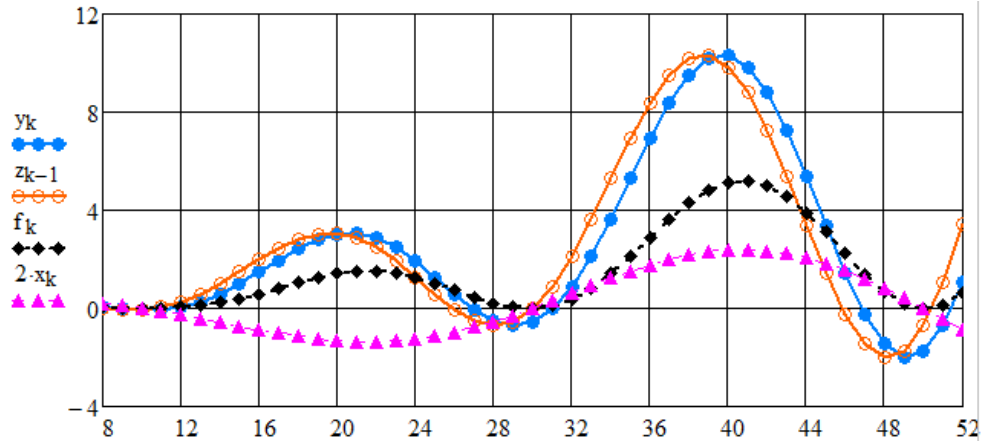


Рис. 6. Графики наблюдаемых значений  $y_k$  и рассчитанных значений  $\tilde{y}_k$  выходной переменной объекта

### 9. Непрерывная модель динамического объекта

Построение непрерывной модели объекта в работе осуществлялось следующим образом. В предположении, что корни передаточной функции вещественные и отрицательные, выполняется обратное преобразование Лапласа. При значениях  $n = 2, m = 1$  система дискретных (разностных) уравнений в изображении по Лапласу имеет вид

$$y_k^1(s) = \frac{y_{k-1}^1}{(s + \alpha_1)} + \frac{Ku_k}{(s + \alpha_1)s}; \quad (13)$$

$$y_k^2(s) = \frac{y_{k-1}^2}{(s + \alpha_2)} + \frac{y_{k-1}^1}{(s + \alpha_2)s}; \quad (14)$$

$$x_k(s) = \frac{x_{k-1}}{(s + \beta)} + \frac{u_k}{(s + \beta)s}. \quad (15)$$

Первые слагаемые  $y_{k-1}^1/(s + \alpha_1), y_{k-1}^2/(s + \alpha_2), x_{k-1}/(s + \beta)$  в правой части выражений (13)–(15) соответствуют общему решению дифференциальных уравнений. Вторые слагаемые выражений (13)–(15) соответствуют частным решениям дифференциальных уравнений первого порядка. Выполнив обратное преобразование Лапласа системы уравнений (13)–(15) при выбранном шаге дискретизации  $\Delta t$ , получим систему уравнений, определяющих дискретную модель объекта:

$$y_k^1 = y_{k-1}^1 \exp(\alpha_1 \Delta t) + (\exp(\alpha_1 \Delta t) - 1)Ku_k / \alpha_1; \quad (16)$$

$$y_k^2 = y_{k-1}^2 \exp(\alpha_2 \Delta t) + y_{k-1}^1 (\exp(\alpha_2 \Delta t) - 1) / \alpha_2; \quad (17)$$

$$x_k = x_{k-1} \exp(\beta \Delta t) + (\exp(\beta \Delta t) - 1)u_k / \beta, \quad (18)$$

где  $y_{k-1}^1, y_{k-1}^2, x_{k-1}$  – начальные значения зависимых функций в уравнениях (16)–(18);  $u_k$  – начальное значение независимой переменной в уравнениях (16), (18);  $y_{k-1}^1$  – начальные значения независимой функции в уравнении (17).

На основе соотношений (16)–(18) дискретную модель нелинейного динамического объекта можно представить в виде уравнения:

$$y_k = (c_1 + c_2)y_{k-1} - c_1c_2y_{k-2} + b_1b_2d_1q_1x_k - b_1b_2d_0q_1x_{k-1} + b_1b_2d_1q_2(x_k)^2 - b_1b_2d_0q_2(x_{k-1})^2, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= \exp(\alpha_1\Delta t); \quad c_2 = \exp(\alpha_2\Delta t); \\ b_1 &= (\exp(-\alpha_1\Delta t) - 1)/\alpha_1; \quad b_2 = (\exp(-\alpha_2\Delta t) - 1)/\alpha_2; \\ d_0 &= \beta \exp(-\beta_1\Delta t) / (\exp(-\beta_1\Delta t) - 1); \quad d_1 = \beta / (\exp(-\beta_1\Delta t) - 1). \end{aligned} \quad (20)$$

В результате решения системы уравнений (20) могут быть определены численные значения всех параметров непрерывной модели нелинейного динамического объекта. Установление соответствия между непрерывной и дискретной моделями может быть выполнено с использованием процедуры верификации [10, 11], содержащей два этапа. На первом этапе определяются параметры модели линейной динамической части объекта, на втором – модели нелинейной части объекта.

### 10. Определение параметров модели объекта

Решение системы уравнений (15) выполняется в следующей последовательности.

**Этап 1.** Для расчета значений полюсов передаточной функции на основе выражений (7) составляется квадратное уравнение:

$$c^2 - B_1c - B_2 = 0. \quad (21)$$

В результате решения квадратного уравнения (21) определяются составляющие параметров непрерывной модели:

$$\begin{aligned} c_1 &= (B_1 - \sqrt{(B_1)^2 + 4B_2})/2 = 0,287, \\ c_2 &= (B_1 + \sqrt{(B_1)^2 + 4B_2})/2 = 0,472. \end{aligned}$$

С использованием значений  $c_1, c_2$  вычисляются значения полюсов линейной динамической части объекта:

$$\alpha_1 = \ln(c_1)/\Delta t = -4,999, \quad \alpha_2 = \ln(c_2)/\Delta t = -3,000. \quad (22)$$

Из (22) следует, что погрешность идентификации полюсов непрерывной модели при среднем квадратичном отклонении  $\sigma = 0,958 \cdot 10^{-2}$  практически равна нулю. При значении  $\sigma = 0,118 \cdot 10^{-1}$  погрешность идентификации

составляет 13 %,  $\sigma = 0,407 \cdot 10^{-1}$ . При этом полюса модели идентифицируются как комплексные.

**Этап 2.** Рассчитываются коэффициенты  $b_1, b_2$  по формулам:

$$b_1 = (c_1 - 1)/\alpha_1 = 0,143, \quad b_2 = (c_2 - 1)/\alpha_2 = 0,176.$$

Значение для нуля в передаточной функции в числителе линейной части модели рассчитывается по формуле

$$\beta = \ln(-B_3/B_4)/\Delta t = -1,041. \quad (23)$$

В соответствие с (23) погрешность идентификации нуля непрерывной модели динамического объекта не более 4 %.

**Этап 3.** Вычисляются весовые коэффициенты модели, которые определяются значением нуля передаточной функции:

$$d_0 = c_3\beta/(c_3 - 1) = -3,502, \quad d_1 = \beta/(c_3 - 1) = -4,543,$$

где  $c_3 = \exp(-\beta\Delta t) = 0,771$ .

**Этап 4.** Параметры нелинейной статической части модели объекта определяются следующим образом:

$$q_1 = (B_3 + B_4)/b_1b_2(d_1 - d_0)K = -0,192,$$

$$q_2 = (B_5 + B_6)/b_1b_2(d_1 - d_0)K = -3,361.$$

Контроль соответствия параметров непрерывной модели параметрам дискретной модели выполняется путем проверки выполнения двух равенств:

$$(B_1 + B_2)/(\exp(-\alpha_1\Delta t) + \exp(-\alpha_2\Delta t) - \exp(-\alpha_1\Delta t)\exp(-\alpha_2\Delta t)) = 1; \quad (24)$$

$$(B_3 + B_4 + B_5 + B_6)/b_1b_2(d_1q_1 - d_0q_1 + d_1q_2 - d_0q_2) = K. \quad (25)$$

Если равенства (24), (25) выполняются, то производится оценка отклонения значений выходной переменной непрерывной модели от значений выходной переменной дискретной модели. Построение и верификация непрерывной модели могут быть востребованы при необходимости иметь для проведения исследований непрерывную модель объекта или дискретную модель с отличающимся шагом дискретизации  $\Delta t$ .

### Заключение

Проведенные исследования с имитационными моделями позволяют утверждать, что идентификация нелинейных динамических объектов может выполняться в следующей последовательности:

1. Выбор структуры динамического нелинейного объекта и задание количества полюсов и нулей передаточной функции объекта.
2. Обоснование варианта модели нелинейного динамического объекта в виде модели Гаммерштейна.
3. Формирование разностного уравнения исследуемого нелинейного динамического объекта на основе предположения о составе полюсов и нулей передаточной функции.

4. Решение задачи идентификации регрессионным методом наименьших квадратов и определение параметров дискретной модели объекта.

5. Оценка погрешности идентификации по среднему квадратичному отклонению рассчитанных значений от наблюдаемых значений выходной переменной.

6. Расчет параметров непрерывной модели по результатам идентификации параметров дискретной модели нелинейного динамического объекта.

Параметры регрессионной модели определяются на основе имеющихся значений наблюдаемых входной и выходной переменных объекта, методом наименьших квадратов определяются параметры регрессионной модели. Параметры дискретной и непрерывной моделей определяются с использованием обратного преобразования Лапласа. Оценка параметров модели нелинейного динамического объекта должна быть реализована на основе согласования структур регрессионной модели и дискретной модели объекта. Количество нулей, полюсов, весовых коэффициентов нелинейной части объекта определяется из условия минимума среднеквадратичного отклонения рассчитанных значений от наблюдаемых значений выходной переменной.

Для решения подзадач параметрической идентификации, отмеченных выше, использована информационно-аналитическая система Loginom Community 6.4. Данная система поддерживает процессы подготовки данных, регрессионного анализа, моделирования, расчета параметров непрерывной модели на основе параметров дискретной модели объекта и визуализации. В системе можно решать задачи параметрической линейной и логистической регрессии при конечном числе неизвестных параметров. Визуализатор системы Loginom обеспечивает отображение информации о входных данных, регрессионной модели, коэффициентах регрессии и детерминации, степени статистической связи между входными и выходными переменными регрессионной модели (Loginom company. URL: <https://loginom.ru>).

### Список литературы

1. Montgomery D. C., Peck E. A., Vining G. G. Introduction to Linear Regression Analysis, 5th Edition. John Wiley & Sons, 2012. 672 p.
2. Kumaran @ Kumar J., Ravi G. A Simple Regression Model for Electrical Energy Forecasting // International Journal of Advanced Research in Electrical, Electronics and Instrumentation Engineering. 2014. Vol. 3, iss. 8. P.11331–11335.
3. Епанешников В. Д., Епанешников И. В. Модели параметрической идентификации нелинейных систем автоматического регулирования // Детерминированные системы. 2012. № 2 (32). С. 112–120.
4. Montgomery D. C., Peck E. A. Introduction to Linear Regression Analysis. New York : Jons Wiley & Sons, 1982. 504 p.
5. Макарычев П. П. Построение модели системной динамики по результатам регрессионного анализа // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : материалы XII Междунар. науч.-техн. конф. Пенза, 2017. С. 113–117.
6. Макарычев П. П., Афонин А. Ю., Шибанов С. В. Прогнозирование состояния объекта на основе авторегрессионной модели // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2019. № 2. С. 11–12.
7. Вятченников Д. Н., Кособуцкий В. В., Носенко А. А., Плотников Н. В. Идентификация нелинейных динамических объектов во временной области // Вестник южно-уральского государственного университета. 2006. № 14. С. 66–70.

8. Макарычев П. П., Волгина М. А. Моделирование многокомпонентных систем на основе маркированных графов : монография. Пенза : Изд-во ПГУ, 2011. 156 с.
9. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ : пер. с англ. 3-е изд. М. : Изд. дом «Вильямс», 2007.
10. Mikles J., Fikar M. *Process Modelling, Identification, and Control*. Springer, 2007. 497 p.
11. Кацюба О. А., Карпов А. А., Тимонин Д. В. Параметрическая идентификация нелинейных динамических систем класса Гаммерштейна при наличии помех, наблюдаемых в выходных сигналах в условиях априорной неопределенности // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2011. № 2. С. 92–103.

### References

1. Montgomery D.C., Peck E.A., Vining G.G. *Introduction to Linear Regression Analysis, 5th Edition*. John Wiley & Sons, 2012:672.
2. Kumaran @ Kumar J., Ravi G. A Simple Regression Model for Electrical Energy Forecasting. *International Journal of Advanced Research in Electrical, Electronics and Instrumentation Engineering*. 2014;3(8):11331–11335.
3. Epaneshnikov V.D., Epaneshnikov I.V. Models of parametric identification of nonlinear automatic control systems. *Determinirovannye si-stemy = Deterministic systems*. 2012;2(32):112–120. (In Russ.)
4. Montgomery D.C., Peck E.A. *Introdaction to Linear Regression Analysis*. New York: Jons Wiley & Sons, 1982:504.
5. Makarychev P.P. Building a model of system dynamics based on the results of regression analysis. *Analiticheskie i chislennye metody modelirovaniya estestvenno-nauchnykh i sotsial'nykh problem: materialy XII Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf. = Analytical and numerical methods for modeling natural science and social problems: proceedings of the 12<sup>th</sup> International scientific and engineering conference*. Penza, 2017:113–117. (In Russ.)
6. Makarychev P.P., Afonin A.Yu., Shibanov S.V. Predicting the state of an object based on an autoregressive model. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavede-niy. Povolzhskiy region. Tekhnicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Engineering sciences*. 2019;(2):11–12. (In Russ.)
7. Vyatchennikov D.N., Kosobutskiy V.V., Nosenko A.A, Plotnikov N.V. Identification of nonlinear dynamic objects in the time domain. *Vestnik yuzhno-ural'skogo gosudarstvennogo universiteta = Bulletin of the South Ural State University*. 2006;(14):66–70. (In Russ.)
8. Makarychev P.P., Volgina M.A. *Modelirovanie mnogokomponentnykh sistem na osnove markirovannykh grafov: monografiya = Modeling of multicomponent systems based on labeled graphs: monograph*. Penza: Izd-vo PGU, 2011:156. (In Russ.)
9. Dreyper N., Smit G.. *Prikladnoy regressionnyy analiz: per. s angl. 3-e izd. = Applied regression analysis: translated from English. The 3<sup>rd</sup> edition*. Moscow: Izd. dom «Vil'yams», 2007. (In Russ.)
10. Mikles J., Fikar M. *Process Modelling, Identification, and Control*. Springer, 2007:497.
11. Katsyuba O.A., Karpov A.A., Timonin D.V. Parametric identification of nonlinear dynamic systems of the Hammerstein class in the presence of noise observed in the output signals under conditions of a priori uncertainty. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Tekhnicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Engineering sciences*. 2011;(2):92–103. (In Russ.)



**Информация об авторах / Information about the authors**

***Петр Петрович Макарычев***

доктор технических наук, профессор,  
заведующий кафедрой математического  
обеспечения и применения ЭВМ,  
Пензенский государственный  
университет (Россия, г. Пенза,  
ул. Красная, 40)

E-mail: pm@pnzgu.ru

***Petr P. Makarychev***

Doctor of engineering sciences, professor,  
head of the sub-department of mathematical  
support and application of computers,  
Penza State University (40 Krasnaya  
street, Penza, Russia)

***Сергей Владимирович Шибанов***

кандидат технических наук, доцент,  
доцент кафедры математического  
обеспечения и применения ЭВМ,  
Пензенский государственный  
университет (Россия, г. Пенза,  
ул. Красная, 40)

E-mail: pm@pnzgu.ru

***Sergey V. Shibanov***

Candidate of engineering sciences, associate  
professor, associate professor  
of the sub-department of mathematical  
support and application of computers,  
Penza State University (40 Krasnaya  
street, Penza, Russia)

***Александр Юрьевич Афонин***

кандидат технических наук, доцент  
кафедры математического  
обеспечения и применения ЭВМ,  
Пензенский государственный  
университет (Россия, г. Пенза,  
ул. Красная, 40)

E-mail: pm@pnzgu.ru

***Aleksandr Yu. Afonin***

Candidate of engineering sciences,  
associate professor of the sub-department  
of mathematical support and application  
of computers, Penza State University  
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

**Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.**

**Поступила в редакцию / Received 10.01.2022**

**Поступила после рецензирования и доработки / Revised 04.02.2022**

**Принята к публикации / Accepted 25.02.2022**